استاتیک
مدرس: علیرضا طاهری
دانشکده مهندسی و علم مواد
دانشگاه صنعتی شریف

جلسه سوم

بنام خدا

فصل سوم - تعادل (Equilibrium)

سرفصل مطالب : - تعریف تعادل

- مراحل بررسی تعادل

- معادلات تعادل

- پدیده‌های فیزیکی عمدتاً پویا (Dynamics) و متغیر با زمان هستند. این پدیده‌ها معمولاً، معادلات دیفرانسیل PDE یا ODE مدل می‌شوند؛ با حل این معادلات، رفتار سیستم مورد نظر تخمین زده می‌شود.

* تعادل در معنای عمومی :

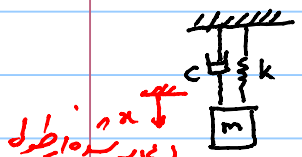
- منظور از تعادل چیست ؟

بسیاری معادلات در حالتهای غیر متغیر با زمان را تعادل و یا بعضاً حالت پایا (steady state) گویند

در حالت تعادل مشتقات زمانی ($\frac{d}{dt}$) هر چیز صورت.

- چند مثال از سیستم‌های دینامیکی :

۱) سیستم مکانیکی :

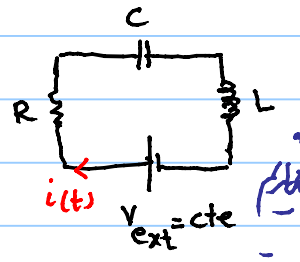


$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mg$

تعادل : $\dot{x} = 0,\ \ddot{x} = 0 \rightarrow x = \frac{mg}{k}$

(تغییر شده از طول آزاد فنر)

2) مدار الکتریکی:



$$V_{ext} - Ri - \frac{1}{C}\int i\,dt - L\frac{di}{dt} = 0$$

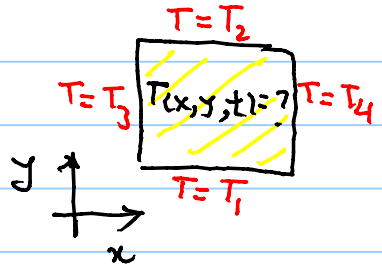
مشتق‌گیری

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

حل تعادلی در حالت تعادل را (ساده‌ترین حالت) $i = 0$ در نظر بگیرید:

حل: $\frac{di}{dt} = \frac{d^2i}{dt^2} = 0 \Rightarrow i = 0$

3) انتقال حرارت:

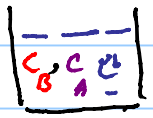


پارامتر بدون بعد

$$\frac{\partial T}{\partial t} - c\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0$$

حل $\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ → معادله‌ی لاپلاس

4) واکنش شیمیایی:



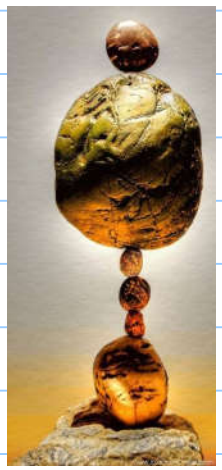
$A \underset{k_2 \text{ ثابت}}{\overset{k_1 \text{ ثابت}}{\rightleftharpoons}} B$

$$V\frac{dC_B}{dt} = -k_1 C_A V + k_2 C_B V$$

حل: $\frac{d}{dt}C_B = 0 \rightarrow -k_1 C_A V + k_2 C_B V = 0 \rightarrow$ "حالت تعادل در دانش"

و آن ...

تعادل به معنای ایستایی:



- استاتیک در درجه اول، شرایط لازم برای حفظ و باقی ماندن اجسام (سازه‌های مهندسی و...) در حال تعادل (به صورت خاص سکون) سروکار دارد.

* طبق قانون اول نیوتن، اگر برایند نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم در حال سکون باشد، جسم ساکن باقی می‌ماند.

* تعادل از دیدگاه قانون دوم: می‌دانیم معادلات حرکت نیوتن - اویلر برای یک جسم صلب بدین شکل است:

$$\sum \vec{F}_i = m\ddot{\vec{r}}_G$$

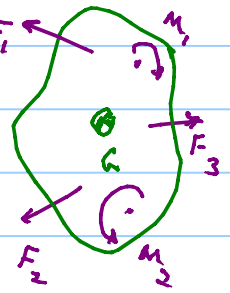
$$\sum \vec{M}_G = \frac{d}{dt}(I_G \omega) \begin{cases} \text{در دوبعد}: I_{1\times1}, \omega_{1\times1} \\ \text{در سه‌بعد}: I_{3\times3}, \omega_{3\times1} \end{cases}$$

در حالت تعادل مشتق زمانی ($\frac{d}{dt}$) هم‌چنین صفر است.

تعادل: $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$

$$\sum \vec{M}_G = \sum (\vec{r}_{i/G} \times \vec{F}_i + \vec{M}_i) = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ شرط لازم و کافی برای تعادل



- برای حفظ سکون، باید سرعت اولیه اجسام و دوران جسم نیز صفر باشد.

$$\dot{r}(t=0) = \vec{0}, \quad \vec{\omega}(t=0) = \vec{0}$$

تمام اعضا و اجزای یک جسم در حال سکون، خود در تعادل هستند.

سوال: تا همیشه برای حل مسائل تعادل، باید جرم در جرم استاتیکی کرد؟ نه.

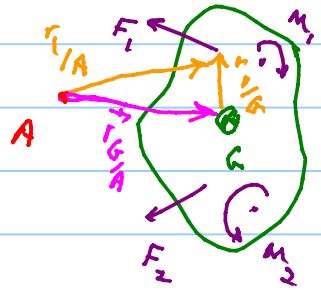
اثبات: فرض کنیم جسمی داریم در حال تعادل باشد؛ یعنی $\sum \vec{F}=\vec{0}$ و $\sum \vec{M}_G=\vec{0}$

$$\sum \vec{M}_A = \sum (r_{i/A} \times F_i + M_i) =$$

$$\sum \left((r_{G/A} + r_{i/G}) \times F_i + M_i \right) =$$

$$\sum \left(r_{G/A} \times F_i + (r_{i/G} \times F_i + M_i) \right) = r_{G/A} \times \underbrace{\sum F_i}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

$\sum M_G = \vec{0}$



* شرط لازم و کافی برای تعادل: شرط لازم و کافی برای تعادل

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \text{tranlational equil.} \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \rightarrow \text{rotational equil.} \end{cases}$$

حول هر نقطه‌ی دلخواه

یک سوال خودمانی: در بررسی‌های ما روی اجسام (در درس)، با این برابری‌ها واقعاً صورت؟

در حقیقت خیر، چون تا حدودی که در درس گفته شد مطلق عمل صفر دارند. ولی این گفته‌ها تا حدی توجیه دارند و در بررسی‌های مهندسی برای برقراری معادلات تعادل کاملاً مفید است!

- مراحل بررسی تعادل :

۱) انتخاب جسم مورد نظر (جسم مورد نظر می تواند یک یا مجموعه ای از اجسام متصل / غیرمتصل به هم) باشد.

2) رسم شکل ساده از جسم و جدا کردن آن از محیط اطراف و نامگذاری نیروها و زاویه های وارد بر آن (رسم پرسمی آزاد (Free Body Diagram (F.B.D.)

3) نوشتن معادلات تعادل

4) حل معادلات و یافتن پاسخ ها (شامل نیروها و زاویه های مجهول یا موقعیت زاویه های تعادلی)

5) بررسی صحت جواب ها (استفاده از حس مهندسی)

- رسم پرسمی آزاد : در آن جدا کردن جسم از محیط اطراف، نیروها و زاویه های آن از محیط بر جسم وارد می شوند که عموماً شامل نیروهای ناشی از میدان ها (وزن، مغناطیسی و...)، نیروهای خارجی تماسی و نیروهای اتصالات و تکیه گاه ها هست.

- سایر این پاسخی، نحوه کار اتصالات و انواع آن را بررسی کنیم.

- عکس های مقابل از کدام است:

۷۵۰

۱: