بنام خدا

جلسه چهاردهم، ۱۴۰۱/۱۲/۱۴ و چهارشنبه ۱۴۰۱/۱۲/۱۵

فصل پنجم - بارهای گسترده و تیرها:

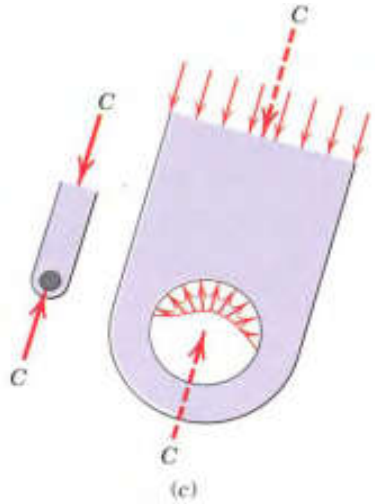
رئوس مطالب:

- بارهای گسترده و معادل سازی آن‌ها با نیروهای متمرکز
- تحلیل استاتیکی تیرها
- رسم نمودارهای نیروی محوری، نیروی برشی و ممان خمشی

- تا الان با نیروهای متمرکز (concentrated) سروکار داشته‌ایم؛ نیروهایی که خطا اثر ندارند (و فقط نقطه اعمال واحدی) دارند. اما ...

... در واقعیت، نیروهای اعمال شده به جسم، در یک ناحیه با حجم (هرچند کوچک) توزیع شده‌اند

به این‌ها نیروهای گسترده گوییم.

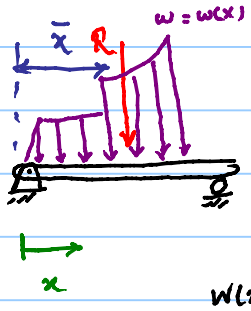


اگر ابعاد (سطح، حجم) نیروی توزیع شده در مسائل ابعاد ناچیزی داشته باشد، استفاده از نیروی متمرکز به جای نیروی گسترده کاملا منطقی و قابل قبول است.

- سوال: وقتی ما در مسائل نیروهای گسترده چه خواهیم کرد؟

تلاش ما بر این است که یک نیروی گسترده را با یک نیروی متمرکز، معادل (از) لحاظ ممان خمشی، نیروی برشی و هم از لحاظ اندازه و هم از نظر نقطه اعمال، معادل با گسترده کنیم.

* نحوه‌ی ساده‌ترین کردن یک بار گسترده با یک بار متمرکز معادل:



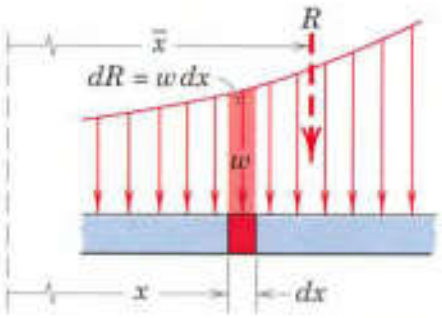
w : نیرو بر واحد طول (شدت بار)

- اندازه‌ی نیروی متمرکز معادل: ساحت سطحی از نمودار بارگسترده با شدت w(x) روی پاره‌خطی از تیر که بار روی آن وارد می‌شود، محاسبه می‌شود.

$$R = \int_{\text{ابتدای بار}}^{\text{انتهای بار}} w(x)\,dx$$

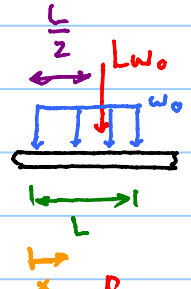
- محل اثر نیروی متمرکز معادل: جایی است که با قرار دادن بار متمرکز معادل، بار گسترده حول آن نقطه، گشتاور نیروی معادل، برابر شود.

$$R\bar{x} = \int x\,w(x)\,dx \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,w(x)\,dx}{R}$$



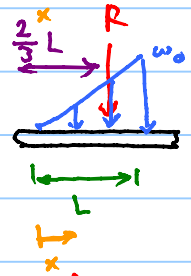
- چند مثال معادل:

1)



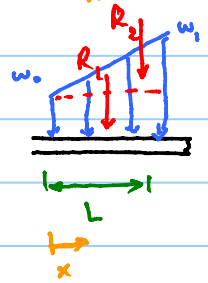
$R_{\text{معادل}} = Lw_0$ ، $\bar{x} = \frac{L}{2}$

2)



$R_{\text{معادل}} = \frac{1}{2}Lw_0$ ، $\bar{x} = \frac{2}{3}L$

3)



$R_{1\,\text{معادل}} = Lw_0$ ، $\bar{x}_1 = \frac{L}{2}$

$R_{2\,\text{معادل}} = \frac{1}{2}L(w_1 - w_0)$ ، $\bar{x}_2 = \frac{2}{3}L$

$$R_{\text{معادل}} = R_1 + R_2 = \frac{1}{2}L(w_0 + w_1)$$

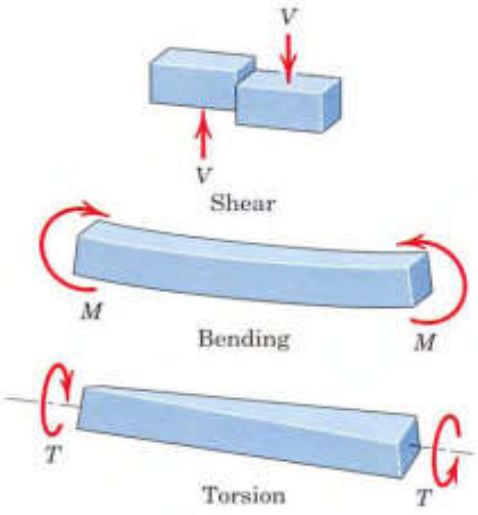
$$\bar{x} = \frac{R_1\bar{x}_1 + R_2\bar{x}_2}{R_1 + R_2}$$

تیرها (Beams) : اعضایی هستند که علاوه بر کشش و فشار، در مقابل خمش، پیچش و برش (یا سایر نیروهای جانبی) از خود مقاومت نشان می‌دهند.

* تحلیل اساسی تیرها : - اثر خارجی ← محاسبه‌ی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

- اثر داخلی ← تعیین توزیع نیرو و لنگاور یا اثر داخلی در طول تیر

H نیروی محوری (axial force)



V : نیروی برشی (Shear force)

M : لنگاور (یا گشتاور) خمشی (Bending Moment)

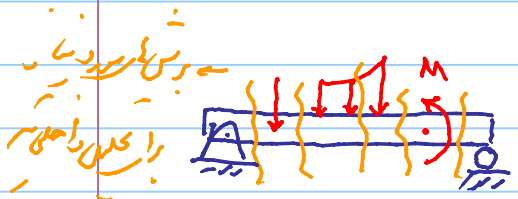
T : لنگاور پیچشی (Torsional Moment)

* رسم دیاگرام های نیروی محوری، نیروی برشی و ممان خمشی :

- جهت طراحی تیرها، به مقادیر نیروهای محوری، برشی و ممان خمشی به وجود آمده در طول تیر تحت بارگذاری نیاز داریم.

در موارد ذکر شده، در ساده، تنش ها را به وجود آورده و ممکن است تخریب آن ساده شود؛ بنابراین به تیران دیاگرام پارامترهای ذکر شده و محل وقوع این دیاگرام ها احتیاج است.

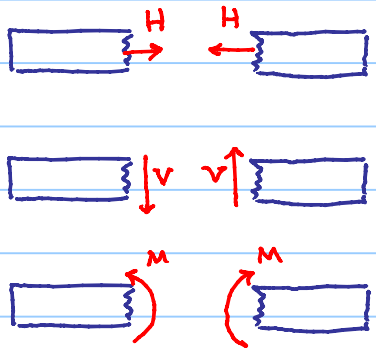
- برای محاسبه‌ی H ، V و M به صورت تابعی از x به تعداد برش در طول تیر نیاز داریم.



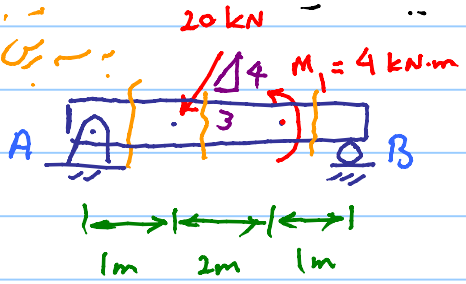
مثل تعداد تیر/ستون های مسیر به برش احتیاج است.

بین بارگذاری هم به برش نیاز داریم.

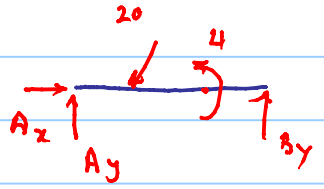
قرارداد : همه جهت های زیر را + میگیریم :



مثال - دیاگرام نیروی محوری، نیروی برشی و ممان خمشی را برای تیر یک سر گیردار زیر رسم کنید.



F.B.D :

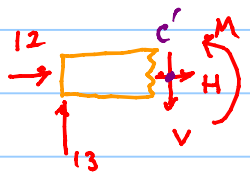


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 12 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 16 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -16 \times 1 + 4 + 4B_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 3 \text{ kN}}, \boxed{A_y = 13 \text{ kN}}$$

برش اول : $0 < x < 1$

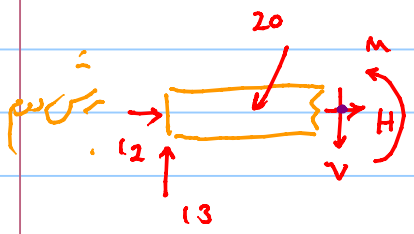


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{H = -12 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{V = +13 \text{ kN}}$$

$$\sum M_{C'} = 0 \Rightarrow M - 13x = 0 \Rightarrow \boxed{M = 13x}$$

برش سوم : $1 < x < 3$

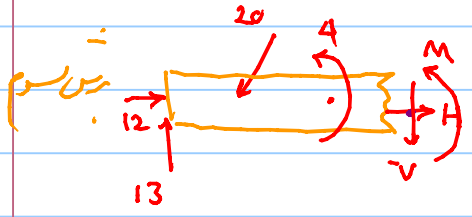


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{H = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 13 - 16 = \boxed{-3 \text{ kN}}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M - 13x + 16(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{M = -3x + 16}$$

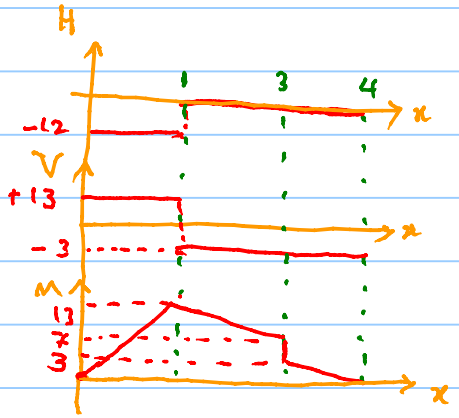
برش سوم : $3 < x < 4$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{H = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{V = -3 \text{ kN}}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow -13x + 16(x-1) + 4 + M = 0 \Rightarrow \boxed{M = -3x + 12}$$

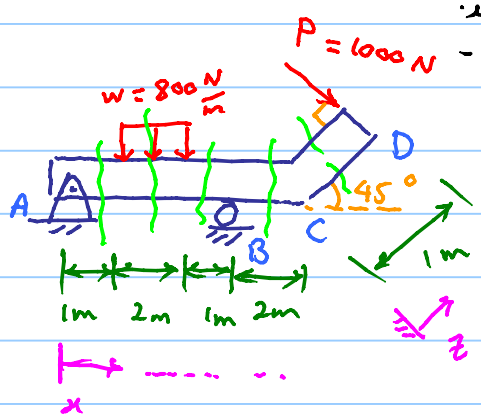


* نمودار $H-x$ مشابه، همان شکل می‌شود.

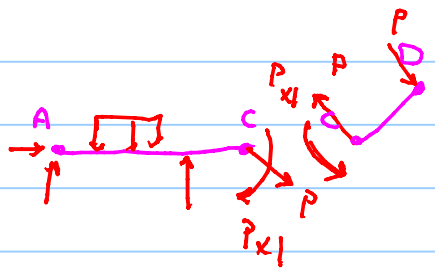
* با توجه به مثبت بودن نمودار $V-x$ می‌شود.

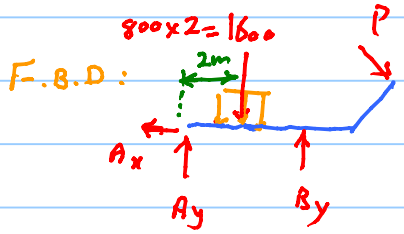
* همان‌طور که مثبت است نمودار $M-x$ می‌شود.

سوال: نمودارهای نیروی محوری، برشی و ممان خمشی را برای تیر زیر رسم نمایید.



$\equiv$





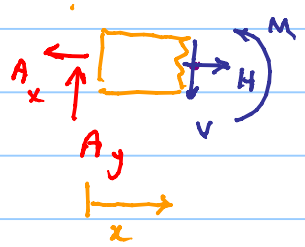
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 500\sqrt{2}\ N}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -1600\times 2 + 4B_y - 500\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 500\sqrt{2}\left(6+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{B_y = 2110.7\ N}$$

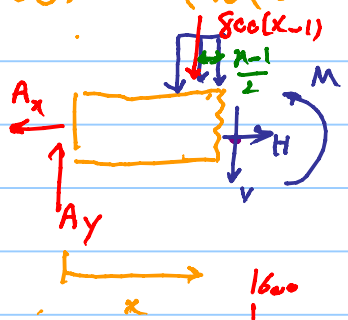
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 1600 + 500\sqrt{2} - 2110.7 \Rightarrow \boxed{A_y = 196.4\ N}$$

برش اول $0 < x < 1$



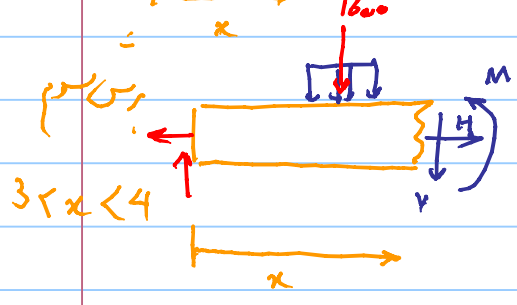
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = 500\sqrt{2}\ N$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = +196.4\ N$$
$$\sum M = 0 \Rightarrow M = 196.4x$$

برش دوم $1 < x < 3$



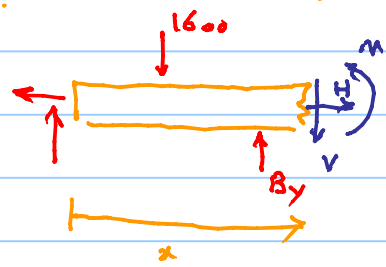
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = 500\sqrt{2}\ N$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 196.4 - 800(x-1)$$
$$\sum M = 0 \Rightarrow M = 196.4x - 800(x-1)\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow M = 196.4x - 400(x-1)^2$$

برش سوم $3 < x < 4$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = 500\sqrt{2}\ N$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 196.4 - 1600 \Rightarrow \boxed{V = -1403.6\ N}$$
$$\sum M = 0 \Rightarrow M = 196.4x - 1600(x-2)$$

قطعة : $4 < x < 6$

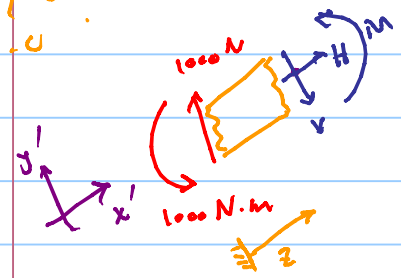


$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = 500\sqrt{2}\ N$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 196.4 - 1600 + 2110.7 \Rightarrow \boxed{V = 707\ N}$

$\sum M = 0 \Rightarrow M = 196.4x - 1600(x-2) + 2110.7(x-4)$

قطعة : $0 < z < 1$



$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow H = 0$

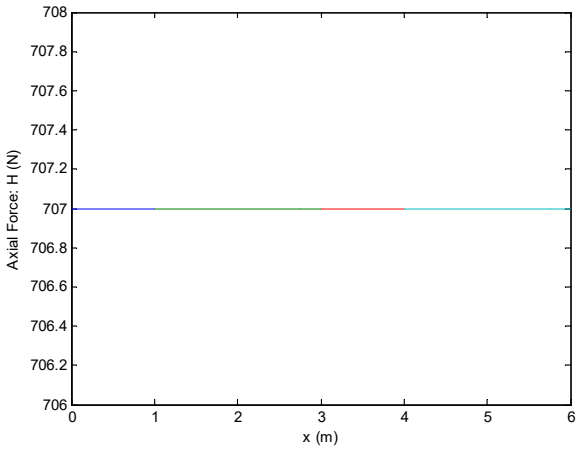
$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow V = 1000\ N$

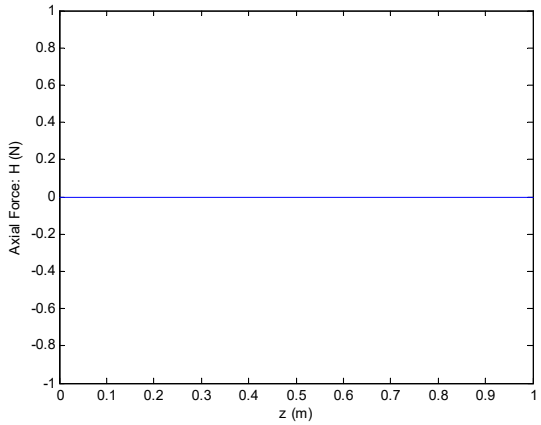
$\sum M = 0 \Rightarrow M = +1000z - 1000$

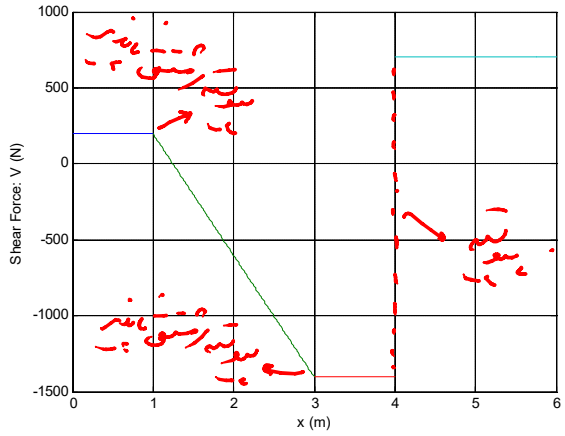
- دیاگرام‌ها ـ معادلات :

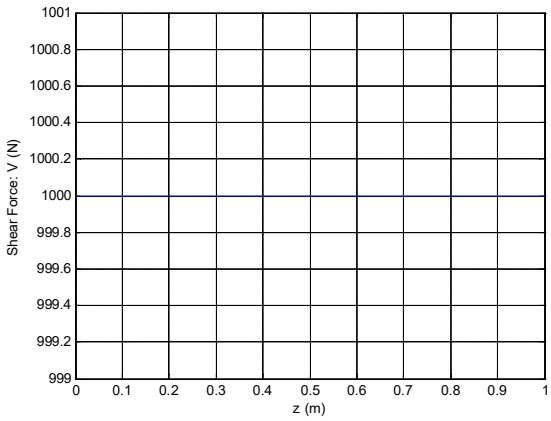
در امتداد محور x

در امتداد محور z

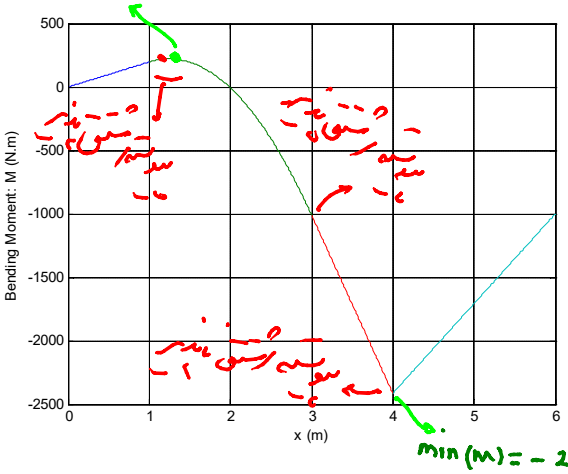




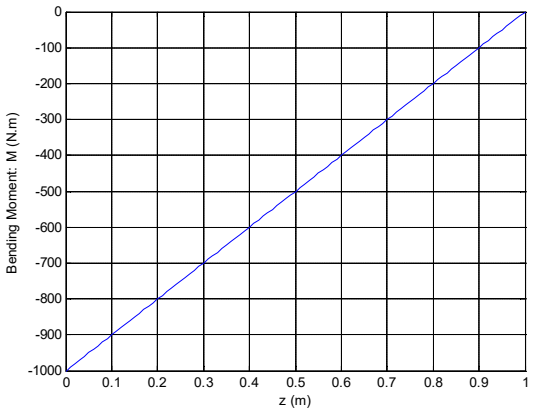




max(M) = 220.5 at x = 1.25m



min(M) = -2414 at x = 4m



* کد نوشته شده جهت رسم دیاگرام‌های نیروهای محوری و برشی و خمشی:

```
clc
clear all
close all

x1=0:1/100:1;
for i=1:length(x1)
    H1(i)=707;
    V1(i)=196.4;
    M1(i)=196.4*x1(i);
end


x2=1:1/100:3;
for i=1:length(x2)
    H2(i)=707;
    V2(i)=196.4-800*(x2(i)-1);
    M2(i)=196.4*x2(i)-400*(x2(i)-1)^2;
end


x3=3:1/100:4;
for i=1:length(x3)
    H3(i)=707;
    V3(i)=-1403.6;
    M3(i)=196.4*x3(i)-1600*(x3(i)-2);
end


x4=4:1/100:6;
for i=1:length(x4)
    H4(i)=707;
    V4(i)=707;
    M4(i)=196.4*x4(i)-1600*(x4(i)-2)+2110.7
*(x4(i)-4);
end

figure (1)
plot(x1,H1,x2,H2,x3,H3,x4,H4)
xlabel('x (m)')
ylabel('Axial Force: H (N)')
%grid on

figure (2)
plot(x1,V1,x2,V2,x3,V3,x4,V4)
xlabel('x (m)')
ylabel('Shear Force: V (N)')
grid on


figure (3)
plot(x1,M1,x2,M2,x3,M3,x4,M4)
xlabel('x (m)')
ylabel('Bending Moment: M (N.m)')
grid on
```

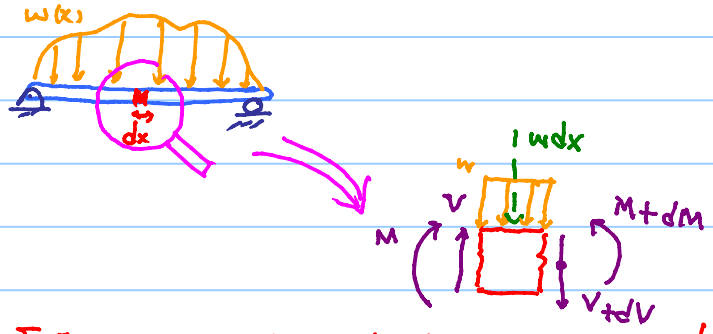
```
z1=0:1/100:1;
for i=1:length(z1)
    H5(i)=0;
    V5(i)=1000;
    M5(i)=1000*z1(i)-1000;
end

figure (4)
plot(z1,H5)
xlabel('z (m)')
ylabel('Axial Force: H (N)')
%grid on

figure (5)
plot(z1,V5)
xlabel('z (m)')
ylabel('Shear Force: V (N)')
grid on

figure (6)
plot(z1,M5)
xlabel('z (m)')
ylabel('Bending Moment: M (N.m)')
grid on
```

* رابطه دیفرانسیلی تعادل تیر :



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - w\,dx - (V+dV) = 0 \Rightarrow dV = -w\,dx \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dx} = -w}$$

- تغییر نیروی برشی (در فاصله‌ای از تیر که شامل نیروی متمرکز نباشد)، برابر است با منفی مساحت زیر منحنی نیروی برشی در همان فاصله.

$$V_{(2)} - V_{(1)} = -\int_{(1)}^{(2)} w\,dx$$

صرف‌نظر می‌کنیم

$$\sum M = 0 \Rightarrow -M - V\,dx + (w\,dx)\frac{dx}{2} + (M+dM) = 0 \Rightarrow dM = V\,dx \Rightarrow \boxed{\frac{dM}{dx} = V}$$

- تغییر ممان (لنگر) خمشی (در فاصله‌ای از تیر که شامل ممان متمرکز نباشد)، برابر است با مساحت زیر منحنی نیروی برشی در همان فاصله.

$$M_{(2)} - M_{(1)} = \int_{(1)}^{(2)} V\,dx$$