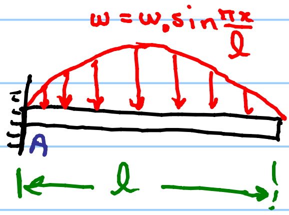
بنام خدا

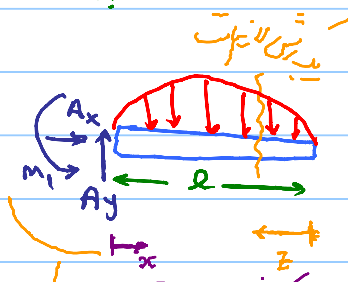
جلسه پانزدهم و شانزدهم

استاتیک
مدرس: علیرضا طاهری
دانشکده مهندسی و علم مواد
دانشگاه صنعتی شریف

مثال - در تیر یک سر گیردار زیر، دیاگرام‌های نیروی برشی و ممان خمشی را رسم نمایید:



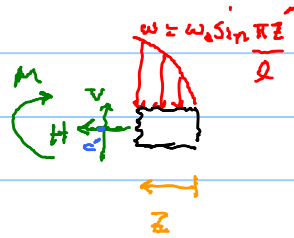
F.B.D :



در تیر یک سر گیردار بهتر است که با توجه به اینکه سیستم مختصات طوری برش بزنیم که نیروهای تکیه‌گاهی را لازم نباشد محاسبه کنیم

خودتان با برش به مسئله را حل کنید

برش $0 < x < l$



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow H = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V - \int_0^z \underbrace{w(z')dz'}_{dF} = 0 \rightarrow V = \int_0^z w_0 \sin \frac{\pi z'}{l} dz'$$

$$\rightarrow V = -\frac{w_0 l}{\pi} \cos \frac{\pi z'}{l} \Big|_0^z \Rightarrow \boxed{V = \frac{w_0 l}{\pi}\left(1 - \cos \frac{\pi z}{l}\right)}$$

$$\Sigma M_{c'} = 0 \rightarrow -M - \int_0^z (z - z') w(z') dz' = 0 \rightarrow$$

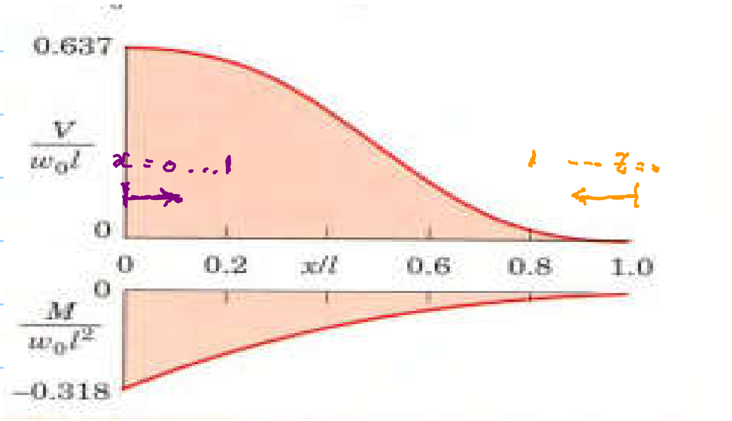
$$M = -\int_0^z (z - z') w_0 \sin \frac{\pi z'}{l} dz' = -w_0 \left(z \int_0^z \sin \frac{\pi z'}{l} dz' - \int_0^z z' \sin \frac{\pi z'}{l} dz' \right)$$

محاسبه از روش جزء به جزء

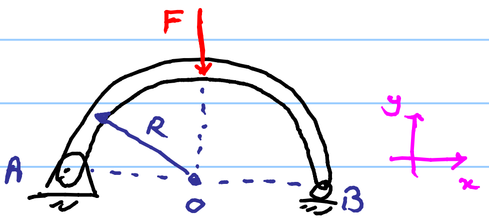
$$\rightarrow M = -w_0 \left(-\frac{l}{\pi} z \cos \frac{\pi z'}{l} \Big|_0^z - \left(-\frac{l}{\pi} z' \cos \frac{\pi z'}{l} \Big|_0^z + \frac{l}{\pi} \int_0^z \cos \frac{\pi z'}{l} dz' \right) \right)$$

$$\rightarrow M = -w_0 \left(\frac{l}{\pi} z - \frac{l}{\pi} z \cos \frac{\pi z}{l} + \frac{l}{\pi} z \cos \frac{\pi z}{l} - 0 - \frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi z'}{l} \Big|_0^z \right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{M = -w_0 \left(\frac{l}{\pi} z - \frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi z}{l} \right)}$$

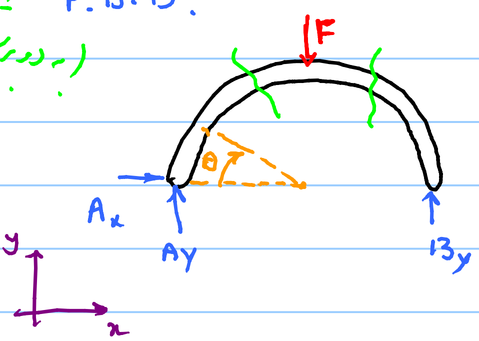


مثال - در تیر خمیده‌ی زیر، دیاگرام نیروی محوری، نیروی برشی و ممان خمشی را رسم نمایید.



F.B.D:

(به دو برش احتیاج است)

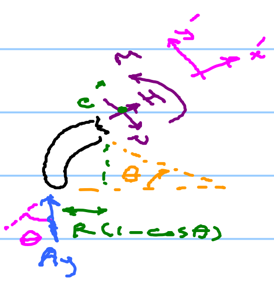


$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y \cdot 2R - F \cdot R = 0 \Rightarrow B_y = \frac{F}{2}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = F \Rightarrow A_y = \frac{F}{2}$$

برش اول $\quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

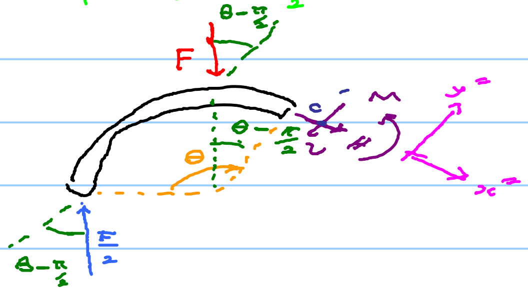


$$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow H = -\frac{F}{2}\cos\theta$$

$$\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V = \frac{F}{2}\sin\theta$$

$$\Sigma M_{c'} = 0 \Rightarrow M = \frac{F}{2} R(1-\cos\theta)$$

برش سوم $\quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

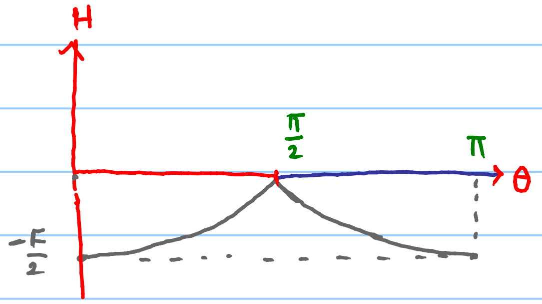


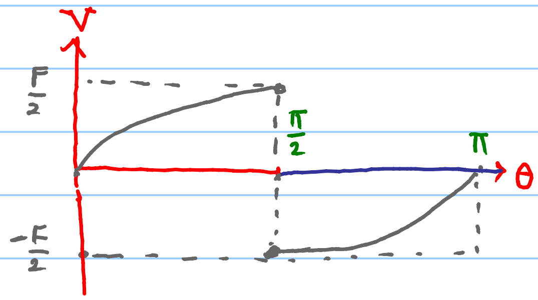
$$\sum F_{x'} = 0 \Longrightarrow H = \frac{F}{2}\sin(\theta - \tfrac{\pi}{2}) - F\sin(\theta - \tfrac{\pi}{2})$$

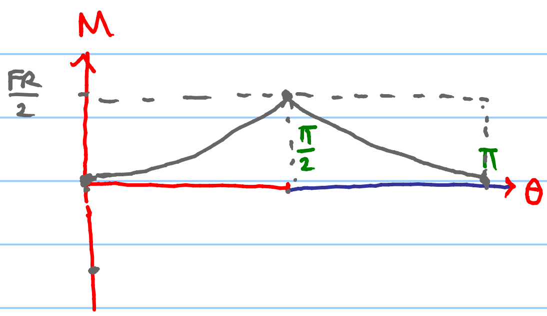
$$\Longrightarrow \boxed{H = \frac{F}{2}\cos\theta}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \Longrightarrow V = \frac{F}{2}\cos(\theta - \tfrac{\pi}{2}) - F\cos(\theta - \tfrac{\pi}{2}) \Longrightarrow \boxed{V = -\frac{F}{2}\sin\theta}$$

$$\sum M_{c'} = 0 \Longrightarrow M = \frac{F}{2}R\left(1 + \sin(\theta - \tfrac{\pi}{2})\right) - FR\sin(\theta - \tfrac{\pi}{2}) \Longrightarrow \boxed{M = \frac{FR}{2}(1 + \cos\theta)}$$





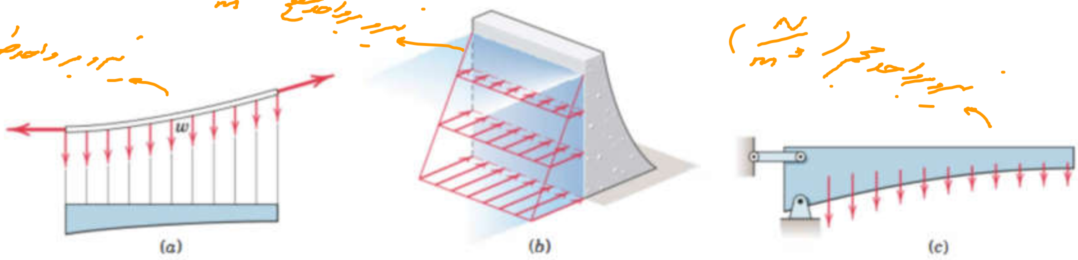


- توزیع گسترده نیروها می‌تواند به صورت توزیع خطی، سطحی و حجمی باشد.

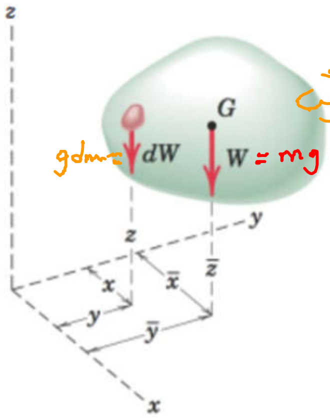
($Pa = \frac{N}{m^2}$) نیرو بر واحد سطح

($\frac{N}{m}$) نیرو بر واحد طول

($\frac{N}{m^3}$) نیرو بر واحد حجم



- محاسبه مختصات مرکز جرم در یک جسم:



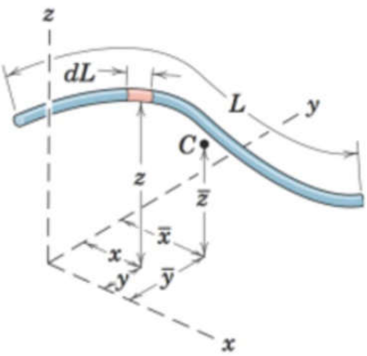
با فرض ثابت بودن شتاب جاذبه

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{m} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dm}{m} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dm}{m}$$

$\int dm$

- محاسبه مرکز خط، سطح یا حجم (Centroids of Lines, Areas, and Volumes)

(با استفاده از فرمول‌های محاسبه مرکز جرم)



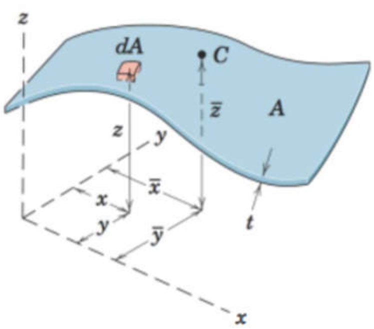
$dm = \rho A\, dL$ (با فرض ثابت بودن ρ و A)

موقعیت مرکز خط:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dL}{L} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dL}{L}$$

$\int dL$

(به عنوان مثال سیم‌های باریک با طول L با سطح مقطع ثابت A و خمیدگی کم)



$dm = \rho t\, dA$ (با فرض ثابت بودن ρ و t)

موقعیت مرکز سطح:

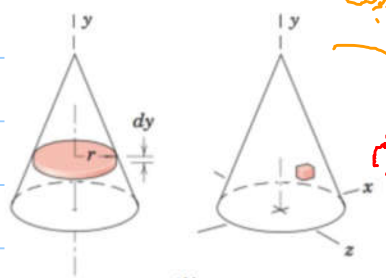
$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dA}{A}$$

$\int dA$

(سطوح باریک با ضخامت ثابت t)

dm = ρ dV

(با فرض ثابت بودن ρ)



(b)

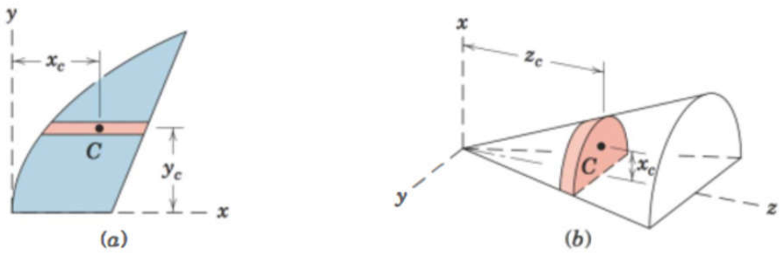
موقعیت مرکز حجم :

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dV}{V}$$

$\int dV$

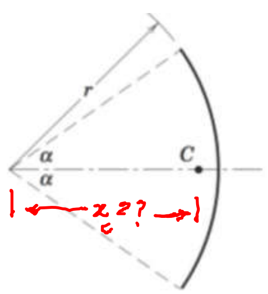
- مراکز خط، سطح یا حجم لزوماً روی جسم قرار نمی‌گیرند.

- با انتخاب هوشمندانه محورهای مختصات (مختصات کارتزین و استوانه‌ای قطبی برای اجسام با مرزهای دایره‌ای شکل و ...)، در نظر گرفتن محورها/صفحات تقارن در هندسه و در نظر گرفتن المان‌های مناسب در انتگرال‌گیری، می‌توان محاسبه مرکز جرم/حجم/سطح/خط را ساده‌تر نمود و بعضاً انتگرال‌های چندگانه را به یک انتگرال تبدیل کرد.



(a) (b)

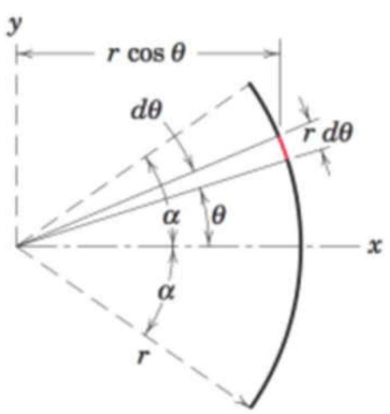
- مثال: در شکل زیر، موقعیت مرکز خط (centroid) میله باریک زیر را محاسبه نمایید.



$x_c = ?$

$\Rightarrow$ محور تقارن شکل x $\Rightarrow y_c = 0$ (با محاسبه نیز به همین نتیجه می‌توان رسید)

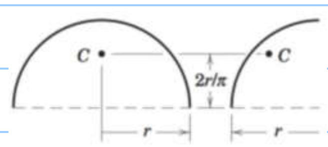
$L = 2\alpha r$



$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} (r\cos\theta)(r\,d\theta)}{L} = \frac{r^2 \sin\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{2\alpha r}$$

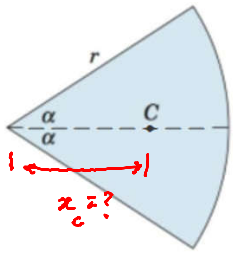
$$\Rightarrow \boxed{x_c = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}}$$

α : نصف زاویه کمان



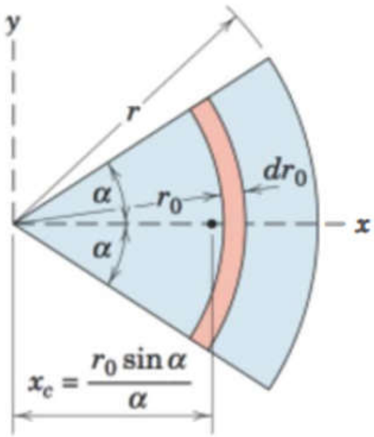
حالات خاص: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ و $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

- مثال: در قطاع دایره‌ای زیر، موقعیت مرکز سطح را محاسبه نمایید.



با توجه به این محورهای مختصات مجدداً به ⟸

$y_c = 0$: دلیل تقارن داریم



$$A_{\text{قطاع}} = \left(\frac{2\alpha}{2\pi}\right)\pi r^2 = \alpha r^2$$

(محیط جزء $2\alpha r_0$)

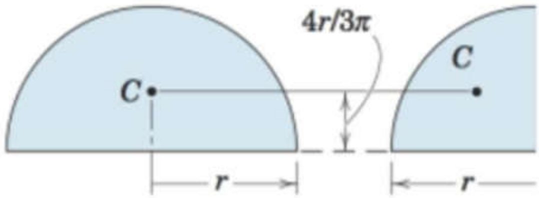
مساحت المان (ضخامت × طول)

$$x_c = \frac{\int_0^r \left(\frac{r_0 \sin\alpha}{\alpha}\right)(2 r_0 \alpha\, dr_0)}{A}$$

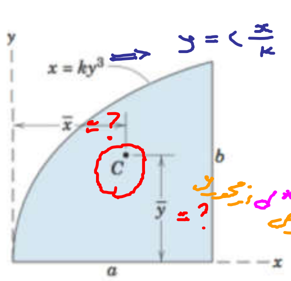
موقعیت x مرکز سطح المان

$$\Rightarrow x_c = \frac{2\sin\alpha \cdot \frac{r^3}{3}}{\alpha r^2} \Rightarrow \left\{ x_c = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha} \right.$$

حالات خاص به ازای $\alpha = \frac{\pi}{4}$ و $\alpha = \frac{\pi}{2}$:



- در شکل زیر، موقعیت مرکز سطح را محاسبه نمایید.



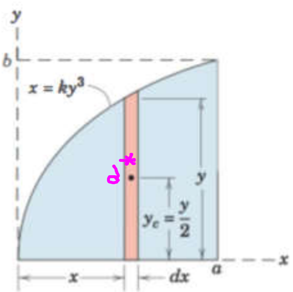
$x = ky^3 \Rightarrow y = \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\text{مساحت سطح } A = \int_0^a y\,dx \;\text{ یا }\; \int_0^b x\,dy = \frac{3ab}{4}$$

d^* از محور y

فاصله مرکز سطح المان

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x\,\overbrace{y\,dx}^{dA}}{A} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{3a^2b}{7}}{\frac{3ab}{4}} \Rightarrow \left\{ \bar{x} = \frac{4}{7}a \right.$$

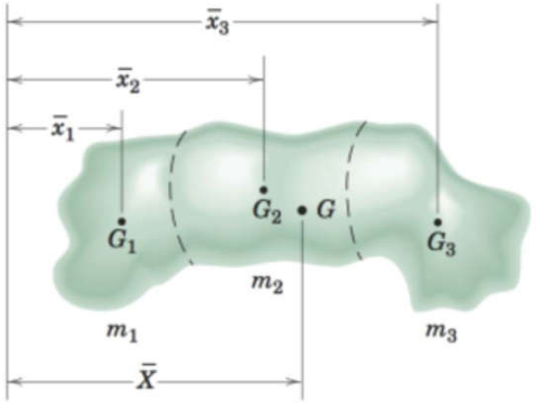


$$\bar{y} = \frac{\int_0^a \left(\frac{y}{2}\right)\overbrace{y\,dx}^{dA}}{A} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{3ab^2}{10}}{\frac{3ab}{4}} \Rightarrow \left\{ \bar{y} = \frac{2}{5}b \right.$$

فاصله مرکز سطح المان (d^*) از محور افقی

- تمرین: لطفاً مسئله را با المان‌گیری افقی (dy به جای dx) مجدداً حل نمایید.

- محاسبه مرکز جرم / سطح و ... اجسام مرکب: اگر یک جسم، مجموعه‌ای از اجسامی باشد که مراکز جرم / سطح و ... آن‌ها به راحتی برای ما قابل محاسبه است (n = شکل با جرم‌های m_i و موقعیت مرکز $\bar{r}_i$)، می‌توان از روابط زیر جهت محاسبه موقعیت مرکز جسم مرکب بهره برد:

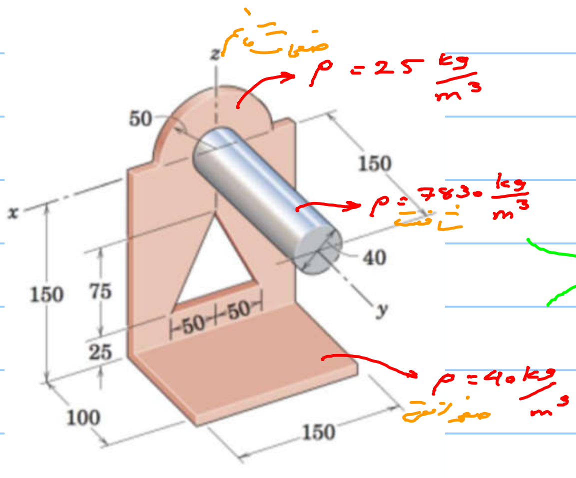


$$\bar{X} = \frac{\Sigma m\bar{x}}{\Sigma m} \qquad \bar{Y} = \frac{\Sigma m\bar{y}}{\Sigma m} \qquad \bar{Z} = \frac{\Sigma m\bar{z}}{\Sigma m}$$

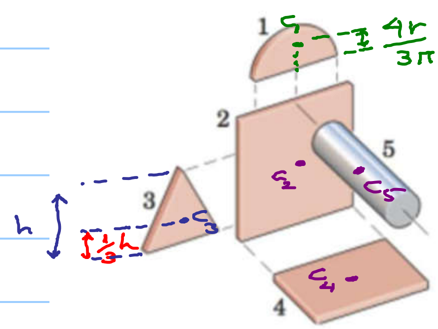
مشابه با نوع centroid مورد نظر، می‌تواند L، A، V نیز باشد.

- در صورتی که حفره / سوراخ در جسم موجود باشد، می‌توان به شکل جرم، سطح، حجم با مقدار منفی به آن نگاه کرد.

- مثال: موقعیت مرکز جرم شکل مقابل را محاسبه نمایید.



Dimensions in millimeters



PART	m kg	$\bar{y}$ mm	$\bar{z}$ mm	$m\bar{y}$ kg·m	$m\bar{z}$ kg·mm
1	0.098	0	21.2	0	2.08
2	0.562	0	−75.0	0	−42.19
3	−0.094	0	−100.0	0	9.38
4	0.600	50.0	−150.0	30.0	−90.00
5	1.476	75.0	0	110.7	0
TOTALS	2.642			140.7	−120.73

- صفحه yz ، صفحه تقارن جسم است ؛ بنابراین $\bar{X}=0$ می‌باشد.

$$\bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{140.7}{2.642} \Rightarrow \left\{ \underline{\bar{Y} = 53.3\ mm} \right.$$

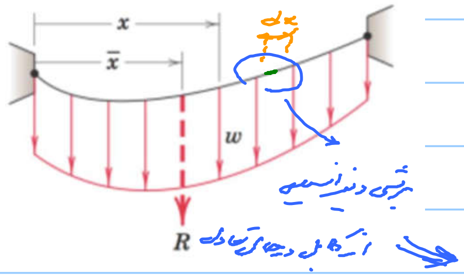
$$\bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} \longrightarrow \bar{Z} = \frac{-120.73}{2.642} \Rightarrow \left\{ \underline{\bar{Z} = -45.7\ mm} \right.$$

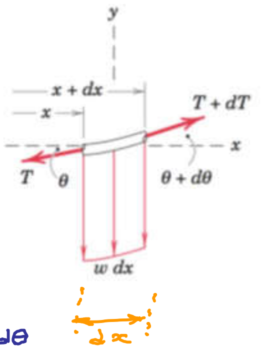
* کابل‌های انعطاف‌پذیر :

- از کابل‌ها (ی انعطاف‌پذیر) در پل‌های معلق کابلی، خطوط انتقال برق و تلفن و ... استفاده می‌شود.

- این کابل‌ها در طول خود تحت نیروهای متمرکز و یا گسترده جانبی قرار می‌گیرند. (از وزن کابل با جرم غیرقابل چشم‌پوشی)

- مقادیر نیروی کشش و زاویه انحراف در طول این کابل‌ها می‌تواند تغییر کند.





$d\theta$ خیلی کوچک $\Rightarrow \begin{cases} \sin d\theta \simeq d\theta \\ \cos d\theta \simeq 1 \end{cases}$

معادلات تعادل برای المان دیفرانسیلی :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow (T+d\theta)\cos(\theta+d\theta) = T\cos\theta \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow (T+d\theta)\sin(\theta+d\theta) = T\sin\theta + w\,dx \end{cases}$$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$$\begin{cases} -T\sin\theta\, d\theta + dT\cos\theta = 0 \rightarrow d(T\cos\theta) = 0 \quad (*) \\ T\cos\theta\, d\theta + dT\sin\theta = w\,dx \rightarrow d(T\sin\theta) = w\,dx \quad (**) \end{cases}$$

$\rightarrow (*) \quad T\cos\theta = \underset{\text{ثابت}}{cte} = T_0 \rightarrow$ مولفه افقی نیروی کشش کابل بدون تغییر باقی می‌ماند

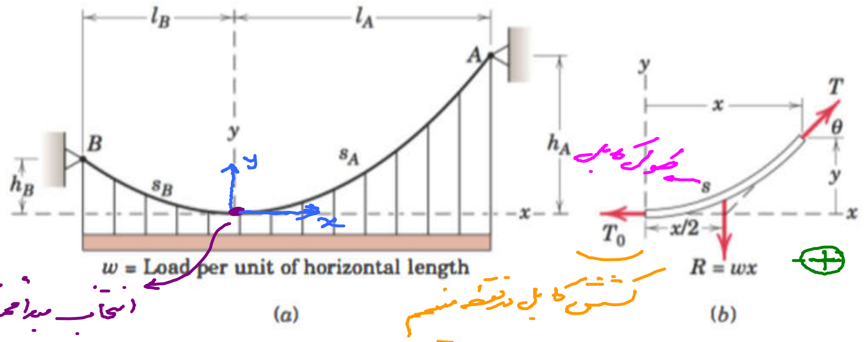
$\rightarrow (**) \quad d(T\sin\theta) = w\,dx \Rightarrow d\left(\frac{T_0}{\cos\theta}\sin\theta\right) = w\,dx \Rightarrow d(T_0 \underbrace{tg\theta}_{\frac{dy}{dx}}) = w\,dx$

$\Rightarrow T_0\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) = w\,dx \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0}}$ → حل معادله => نمایش $y=f(x)$ در شرایط مرزی (انتهای تکیه‌گاه‌ها) = معادله نمایش منحنی قرارگرفتن کابل است)

معادله دیفرانسیل حاکم بر کابل تحت بار جانبی w

حالت خاص) w ثابت) = بار خطی به صورت یکنواخت و یا در تحقیق بررسی اثر وزن کابل با فرض توزیع یکنواخت در راستای x)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} = cte \rightarrow$$ ثابت — به شکل سهمی (منحنی درجه ۲ نسبت به x)



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{w}{T_0}x + c_1 \rightarrow \boxed{y = \frac{wx^2}{2T_0} + c_2}$$

(at $x=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$) $c_1 = 0$ (at $x=0 \rightarrow y=0$) $c_2 = 0$

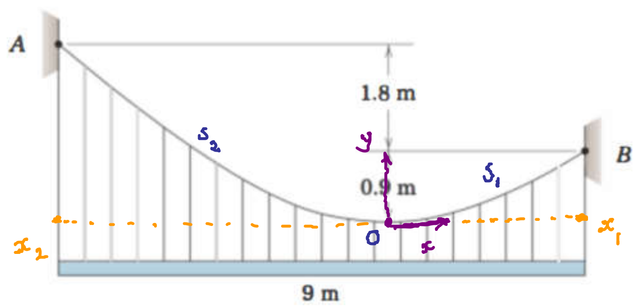
از شکل: $\vec{T} = \vec{T_0} + \vec{R} \rightarrow T = \sqrt{T_0^2 + (\underbrace{wx}_{R})^2}$ $\quad (x = x_{max} \Rightarrow T = T_{max})$

کشش کابل در هر نقطه دلخواه x

جزء دیفرانسیل طول کابل $\leftarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$\Rightarrow \text{طول کابل} = \int_0^{s_a} ds = \int_0^{l_a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^{l_a}\sqrt{1+\left(\frac{wx}{T_0}\right)^2}\,dx \underset{\frac{h_a}{l_a}<\frac{1}{2}}{=} l_a\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{h_a}{l_a}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{h_a}{l_a}\right)^4\right)$$

مثال: در شکل زیر، اگر ماکزیمم نیروی کشش در کابل انعطاف پذیر AB، 5kN باشد، چگالی سد ۹ متری (ρ)، تنش کشش کابل (T_0) و طول کابل (L) را بیابید.



$w = \rho g = cte$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} = \text{ثابت} \Rightarrow y = \frac{w}{2T_0}x^2$$

$$y(x_1) = 0.9 \Rightarrow \frac{w}{2T_0}x_1^2 = 0.9$$

$$y(x_2) = 2.7 \quad \frac{w}{2T_0}x_2^2 = 2.7$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = \frac{1}{3} \xrightarrow{x_1 - x_2 = 9} \frac{x_1}{x_1 - 9} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{-9}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_1 = -12.3 \quad (\text{غ ق ق} \leftarrow x_1>0) \\ x_1\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{9}{\sqrt{3}} \Rightarrow \{x_1 = 3.29\,m \quad (\text{ق ق}) \Rightarrow \{x_2 = -5.71\,m \end{cases}$$

$$T_{max}^2 = T_0^2 + (\omega x)_{max}^2 \Rightarrow 25 = T_0^2 + (5.71\,\omega)^2 \Rightarrow 32.6\,\omega^2 + T_0^2 = 25$$

$$\Rightarrow T_0 = 3.6\,kN, \quad \omega = 0.6\,\frac{kN}{m}$$

$$y = \frac{\omega}{2T_0}x^2 \Rightarrow 0.9 = \frac{\omega}{2T_0}(3.29)^2 \Rightarrow \omega = 0.17\,T_0$$

$$\omega = \rho g \Rightarrow \left\{\rho = 62\,\frac{kg}{m}\right.$$

$$L = \text{طول قوس } AB = \text{طول قوس } OA + \text{طول قوس } OB = s_1 + s_2 \simeq \left(3.29 \times \left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{0.9}{3.29}\right)^2+\cdots\right)\right) + \left(5.71 \times \left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{2.7}{5.71}\right)^2+\cdots\right)\right)$$

$$= 3.45 + 6.56 \Rightarrow \left\{\text{طول قوس} \simeq 10.0\,m\right.$$